PARAGRAAF 11.0 : VOORKENNIS

LES 1 : STELSELS, FORMULES EN AFGELEIDE

VOORBEELD 1

Los op.

a. $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 5y = 38 \\ x = y + 5 \end{cases}$

OPLOSSING 1

a.

(1) $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 10x + 5y = 0 \end{cases}$ $-$

$-7x + 0 = -7$

$x = 1$

(2) $3 \cdot 1 + 5y = -7$

$5y = -10$

$y = -2$

dus oplossing is $(1, -2)$

b.

(1) $\begin{cases} 2x + 5y = 38 \\ x = y + 5 \end{cases}$ → x = y + 5 invullen (substitutie)

$2(y + 5) + 5y = 38$

$2y + 10 + 5y = 38$

$7y + 10 = 38$

$7y = 28$

$y = 4$

(2) dus $x = 4 + 5 = 9$

Snijpunt $(9,4)$

LES 2 : KWADRATISCHE FORMULES

Er zijn 3 notaties voor kwadratische vergelijkingen :

(1) $y = ax^2 + bx + c$

Top berekenen door: $x_{top} = \frac{-b}{2a}$ of afgeleide = 0

(2) $y = a(x - d)(x - e)$ snijdt de x-as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$.

De top ligt precies tussen de snijpunten met de x-as → $x_{top} = \frac{d+e}{2}$

(3) $y = a(x - p)^2 + q$

$Top = (p, q)$

VOORBEELD 1

Stel de formules op van de volgende parabolen.

a. met top$(3{,}10)$ en door het punt $A(1{,}4)$.

b. door de punten $A(-3{,}0), B(7{,}0)$ *en* $C(6{,}4)$.

OPLOSSING 1

a. $p = 3 \; en \; q = 10 \rightarrow y = a(x - 3)2 + 10$

$(1{,}4) \rightarrow 4 = a(1 - 3)2 + 10$

$4 = a \cdot 4 + 10$

$-6 = a \cdot 4$

$a = -1\frac{1}{2}$

$y = -1\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 10$

$y = -1\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + 10$

$y = -1\frac{1}{2}x^2 + 9x + 23\frac{1}{2}$

b. De snijpunten met de x-as zijn: $A(-3{,}0) \; en \; B(7{,}0) \rightarrow d = -3 \; en \; e = 7$

In $y = a(x - d)(x - e)$ invullen geeft $y = a(x + 3)(x - 7)$

$C(6{,}4) \rightarrow 4 = a(6 + 3)(6 - 7)$

$4 = a \cdot -9$

$a = -\frac{4}{9}$

Dus $y = -\frac{4}{9}(x + 3)(x - 7) = -\frac{4}{9}(x^2 - 4x - 21)$

$y = -\frac{4}{9}x^2 + 1\frac{7}{9}x + 9\frac{1}{3}$

LES 3 : DE AFGELEIDE FUNCTIE

REGELS DIFFERENTIËREN

(1) Hoofdregel: $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$

(2) Kettingregel: $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x))$

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = (10 - 4x)^7$

OPLOSSING 1

(1) Neem $u = 10 - 4x \quad \rightarrow u' = -4$

Dan is $f(u) = u^7 \rightarrow f'(u) = 7u^6$

(2) $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = -4 \cdot 7u^6 = -4 \cdot 7(10 - 4x)^6 =$

$f'(x) = -28(10 - 4x)^6$

SNELLE MANIER

Het kan ook sneller zonder de u. De macht ervoor, de macht eentje lager en vermenigvuldigen met de afgeleide van wat tussen haakjes staat.

$f'(x) = -4 \cdot 7(10 - 4x)^6 = -28(10 - 4x)^6$

PARAGRAAF 11.1 : STELSELS BIJ PARABOLEN

LES 1 : STELSELS BIJ PARABOLEN EN WISKUNDIGE MODELLEN

VOORBEELD 1

De parabool $y = x^2 + bx + c$ gaat door de punten $(1, -2)$ en $(2,3)$
Stel de formule op van de parabool in de vorm y = ax^2 + bx + c.

OPLOSSING 1

(1) Punten invullen

$(1, -2) \quad \rightarrow \ -2 = 1^2 + b + c$

$\rightarrow -3 = b + c$

$(2,3) \quad \rightarrow \ 3 = 2^2 + 2b + c$

$\rightarrow -1 = 2b + c$

(2) Stelsel maken en oplossen

$$\begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$

$\underline{\qquad\qquad}\ -$

$-b = -2$

$b = 2$

(3) $2 + c = -3$

$c = -5$

(4) Geef de formule : $y = x^2 + 2x - 5$

VOORBEELD 2

De lijnen $k: y = 2ax + b$ en $l: y = 3bx + a$ snijden elkaar in het punt (1,6).
Bereken a en b.

OPLOSSING 2

(1) punt invullen

$(1,6)\ in\ k \ \rightarrow 6 = 2a + b$

$(1,6)\ in\ l \ \rightarrow 6 = a + 3b$

(2) stelsel maken en oplossen

$\begin{cases} 2a + b = 6 \\ a + 3b = 6 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2a + b = 6 \\ 2a + 6b = 12 \end{cases}$ $-$

$0 - 5b = -6$

$b = 1,2$

(3) $a + 3 \cdot 1,2 = 6$

$a + 3,6 = 6$

$a = 2,4$

(4) Oplossing : $a = 2,4\ en\ b = 1,2$

PARAGRAAF 11.2 (OMGEKEERD) EVENREDIG

DEFINITIE (RECHT) EVENREDIG

- Formule $y = ax$
- Tabel : als x twee keer zo groot, dan y ook twee keer zo groot
- In tabel : $\frac{y}{x} = overal\ 3$
- Grafiek is een rechte lijn

x	5	10	20
y	15	30	60

DEFINITIE OMGEKEERD EVENREDIG

- Formule $y = \frac{a}{x}$
- Tabel : als x twee keer zo groot, dan y ook twee keer zo klein.
- In tabel : $y \cdot x = overal\ 20$
- Grafiek is een hyperbool

x	5	10	20
y	4	2	1

VOORBEELD 1

Sjors had op dag vier 800 vlooien. Stel de formule op als het aantal vlooien (V)

a. (recht) evenredig is met het aantal dagen (d).

b. omgekeerd evenredig is met het aantal dagen (d).

OPLOSSING 1

a. $y = a \cdot x \rightarrow V = a \cdot d$

Punt (4, 800) invullen :

$$800 = a \cdot 4 \rightarrow a = \frac{800}{4} = 200$$

Dus $V = 200d$

b. $y = \frac{a}{x} \rightarrow V = \frac{a}{d}$

Punt (4, 800) invullen :

$$800 = \frac{a}{4} \rightarrow a = 800 \cdot 4 = 3200$$

Dus $V = \frac{3200}{d}$

LES 2 : EVENREDIG EN OMGEKEERD EVENREDIG MET EEN MACHT VAN X

VOORBEELD 1

Gegeven is dat L is evenredig met $x^{1,4}$. Voor $x = 3$ is $L = 15$.

a. Bepaal de formule.

b. Bepaal de waarde van L als $x = 10$

OPLOSSING 1

a. L is evenredig met $x^{1,4} \rightarrow L = ax^{1,4}$

$x = 3$ en $L = 15$ invullen geeft

$15 = a \cdot 3^{1,4} \rightarrow a = \frac{15}{3^{1,4}} = 3{,}22$

Dus de formule is $L = 3{,}22x^{1,4}$

b. Invullen van $x = 10$ in de formule geeft $L = 3{,}22 \cdot 10^{1,4} \approx 81$

VOORBEELD 2

Hieronder in de tabel zie je de gegevens van de lengte l in mm en de oppervlakte O in mm^2 van eikenbladen.

L	8	12	18
O	19	43	99

a. Toon aan dat O evenredig is met l^2 en stel de formule op van O.

b. Een eikenblad heeft een oppervlakte van 2 cm^2. Geef een schatting van de lente van het blad in mm nauwkeurig.

OPLOSSING 2

a. $O = aL^2 \rightarrow a = \frac{O}{L^2}$

$a = \frac{O}{L^2} = \frac{19}{8^2} = 0{,}30$

$a = \frac{43}{12^2} = 0{,}30$

$a = \frac{99}{18^2} = 0{,}306$

$a \approx 0{,}30$ (delingen bij benadering gelijk) dus $O = 0{,}30L^2$

b. 2 cm^2 = 200 mm^2

$0{,}30L^2 = 200$

$L^2 \approx 667$

$L \approx 25{,}82$

Dus lengte is ongeveer 26 mm.

PARAGRAAF 11.3 : STANDAARDFUNCTIES

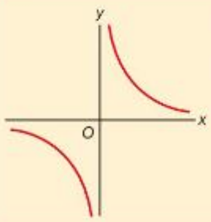
LES 1 : TRANSFORMATIES

DEFINITIE OVERZICHT STANDAARDFUNCTIES

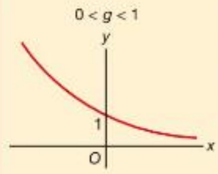
Het effect van transformaties op een standaardgrafiek	
Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met a.	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a.
Vermenigvuldiging t.o.v. de y-as met b.	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b}x$.
Translatie $(c, 0)$	Vervang in de formule x door $x - c$.
Translatie $(0, d)$	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

Standaardfuncties

Wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$
liggende halve parabool
domein = $[0, \rightarrow\rangle$
bereik = $[0, \rightarrow\rangle$

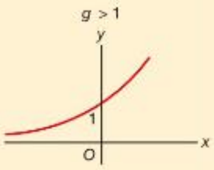


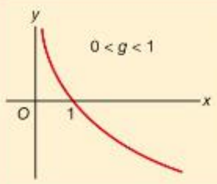
Gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$
hyperbool
verticale asymptoot $x = 0$
horizontale asymptoot $y = 0$



Exponentiële functie $f(x) = g^x$

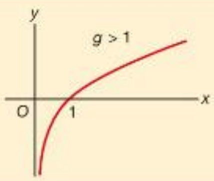
$0 < g < 1$	$g > 1$
grafiek is dalend	grafiek is stijgend
domein = $\mathbb{R}$	domein = $\mathbb{R}$
bereik = $\langle 0, \rightarrow\rangle$	bereik = $\langle 0, \rightarrow\rangle$
hor. asymptoot $y = 0$	hor. asymptoot $y = 0$

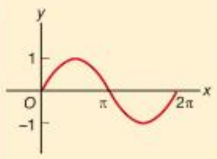




Logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$

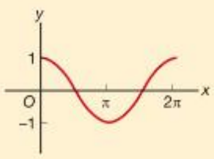
$0 < g < 1$	$g > 1$
grafiek is dalend	grafiek is stijgend
domein = $\langle 0, \rightarrow\rangle$	domein = $\langle 0, \rightarrow\rangle$
bereik = $\mathbb{R}$	bereik = $\mathbb{R}$
vert. asymptoot $x = 0$	vert. asymptoot $x = 0$





Goniometrische functie

$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
ev. stand 0	ev. stand 0
amplitude 1	amplitude 1
periode 2π	periode 2π
beginpunt $(0, 0)$	beginpunt $(0, 1)$



DEFINITIES TRANSFORMATIES

- T(p,q) = { Translatie / verschuiving van de grafiek p naar rechts en q omhoog }
- $V_{\text{x-as, c}}$ = { Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor c }

REGELS BIJ TRANSFORMEREN

(1) $f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x-a)+b$

(2) $f(x) \xrightarrow{V_{x-as,c}} c \cdot f(x)$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^4$. Bepaal de formule die ontstaat als :

a. f eerst 5 naar rechts / 2 omlaag en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3.

b. f eerst vermenigvuldigd wordt met -2 en dan 3 naar links verschoven wordt.

OPLOSSING 1

a. $x^4 \xrightarrow{T(5,2)} (x-5)^4+2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot ((x-5)^4+2) = 3 \cdot (x-5)^4+6$

b. $x^4 \xrightarrow{V_{x-as,-2}} -2 \cdot x^4 \xrightarrow{T(-3,0)} -2 \cdot (x--3)^4 = -2 \cdot (x+3)^4$

PARAGRAAF 11.4 : WORTELFUNCTIES EN GEBROKEN FUNCTIES

LES 1 VERSCHILLENDE VORMEN VERGELIJKINGEN

VERGELIJKINGEN VAN EEN SPECIALE VORM

Er zijn een aantal vormen van vergelijkingen die vaker terugkomen

(1) $A \cdot B = 0$

$A = 0 \ v \ B = 0$

(2) $A^2 = B^2$

$A = B \ v \ A = -B$

(3) $A \cdot B = A \cdot C$ of $A \cdot B = A \cdot C$ $\{ delen\ door\ A, kan\ ook\ nul\ zijn\ !! \}$

$A \cdot B - A \cdot C = 0$ $B = C \ v \ A = 0$

$A(B - C) = 0$

$A = 0 \ v \ B = C$

(4) $A \cdot B = A$ of $A \cdot B = A$ $\{ delen\ door\ A, kan\ ook\ nul\ zijn\ !! \}$

$A \cdot B - A = 0$ $B = 1 \ v \ A = 0$

$A(B - 1) = 0$

$A = 0 \ v \ B = 1$

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $(x + 3)^2 = (10 - 2x)^2$

b. $(x - 1)(x + 7) = x + 7$

c. $x\sqrt{x + 1} = 3x$

OPLOSSING 1

a. $(x+3)^2 = (10-2x)^2$

$x + 3 = 10 - 2x \quad v \quad x + 3 = -(10 - 2x)$

$3x = 7 \quad v \quad x + 3 = -10 + 2x$

$x = \frac{7}{3} \quad v \quad -x = -13$

$x = \frac{7}{3} \quad v \quad x = 13$

b. $(x-1)(x+7) = x + 7 \qquad (deel\ door\ x + 7)$

$x - 1 = 1 \quad v \quad x + 7 = 0$

$x = 2 \quad v \quad x = -7$

c. $x\sqrt{x+1} = 3x \qquad (deel\ door\ x)$

$\sqrt{x+1} = 3 \quad v \quad x = 0$

$x + 1 = 9 \quad v \quad x = 0$

$x = 8 \quad v \quad x = 0$

LES 2 : WORTELFORMULES, DOMEIN EN BEREIK

DEFINITIES

- Domein = { alle x-en die je mag invullen in de formule }
- Bereik = { alle y-waarden die als uitkomst uit de formule kunnen komen }

STAPPENPLAN DOMEIN EN BEREIK BEPALEN:

(1) Bereken de coördinaten van het beginpunt (wortel = 0)
(2) Bereken met GR een aantal punten een schets de grafiek.
(3) Lees uit de grafiek het domein en bereik af.

VOORBEELD 1

a. Bepaal het domein en bereik van $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$
b. Los algebraïsch op : $f(x) > -1$
c. Schrijf x als functie van y bij de formule $y = 2 - \sqrt{x+4}$

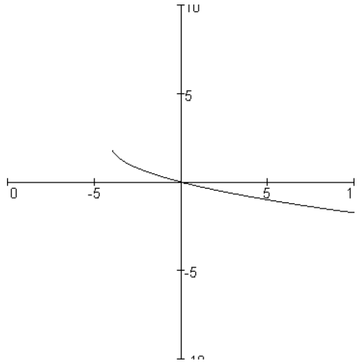
OPLOSSING 1

a. **(1)** x + 4 = 0

$x = -4 \rightarrow y = 2$

Beginpunt = $(-4{,}2)$

(2) $Y1 = 2 - \sqrt{x+4}$ geeft de volgende schets :



(3) $D_f = [-4, \rightarrow>$ en $B_f = <\leftarrow, 2>$

b. Een ongelijkheid bestaat altijd uit drie stappen

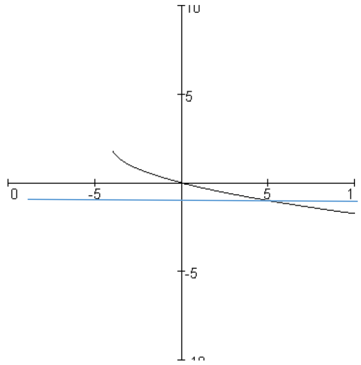
(1) Los de gelijkheid op $2 - \sqrt{x+4} = -1$

$\sqrt{x+4} = 3$

$x + 4 = 9$

$x = 5$

(2) Maak een schets :



(3) Lees de oplossing af en let op het randpunt !!!

$-4 \leq x \leq 5$

c. $\boldsymbol{y = 2 - \sqrt{x+4}}$

$\boldsymbol{y - 2 = -\sqrt{x+4}}$

$\boldsymbol{-y + 2 = \sqrt{x+4}}$

$\boldsymbol{y^2 - 4y + 4 = x + 4}$

$\boldsymbol{x = y^2 - 4y}$

OPMERKINGEN

- Om de wortelgrafiek te <u>tekenen</u> heb je stap 1 en 2 nodig. Uiteraard moet je dan bij stap 2 een aantal punten precies uitrekenen en de grafiek netjes tekenen.

LES 2 : HALVE CIRKELS EN GEBROKEN VERGELIJKINGEN

VOORBEELD 1

Toon aan dat de grafiek van $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 20}$ een halve cirkel is.

OPLOSSING 1

Een cirkelvergelijking heeft de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. We gaan de bovenstaande vergelijking proberen om te schrijven naar deze vorm :

$y = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 20}$

$y - 1 = \sqrt{-x^2 + 8x + 20}$ { kwadrateren }

$(y - 1)^2 = -x^2 + 8x + 20$

$x^2 - 8x + (y - 1)^2 = 20$ { kwadraat $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ afsplitsen }

$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 = 20$

$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 36$

CONCLUSIE

- Het is een cirkel met middelpunt (4,1) en straal = 6.
- Omdat wortel altijd ≥ 0 is, is
  f(x) = y = 1 + wortel ≥ 1
  Dus het is een halve cirkel.

LES 3 : ASYMPTOTEN BIJ BREUKEN

ASYMPTOTEN BIJ GEBROKEN VERGELIJKING

(1) Verticale Asymptoot (VA)

Noemer = 0.

(2) Horizontale Asymptoot

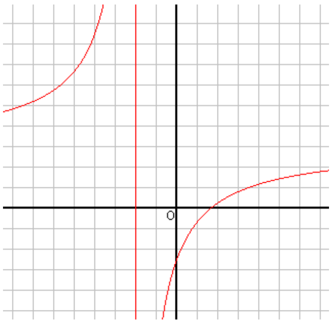
x heel groot maken > y gaat naar een getal

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x-5}{x+2}$

a. Teken de grafiek van f.

b. Los op $f(x) \geq -x + 4$



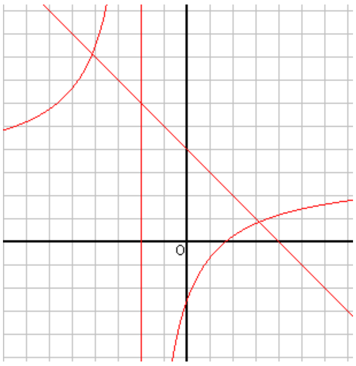
OPLOSSING 1

a. verticale asymptoot: x + 2 = 0 dus x = –2

horizontale asymptoot: y = 3 (3000000/1000000=3)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	6,7	8,5	14		–8	–2,5	–0,7	0,25	0,8	1,2	1,4

b. $\frac{3x-5}{x+2} \geq -x + 4$



(1) $y_1 = \frac{3x-5}{x+2}$

$y_2 = -x + 4$

(2) $[-15,15]\ x\ [-15,15]$

(3) calc intersect

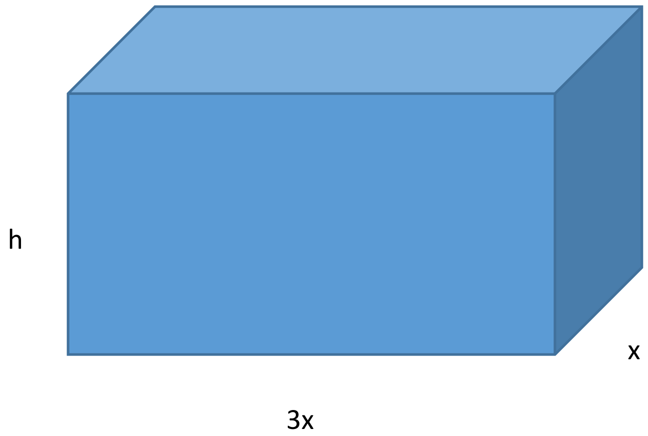
(4) $x = -4{,}14 \ \ v \ \ x = 3{,}14$

(5) Oplossing aflezen uit de schets $-4{,}14 \leq x < -2 \ \ v \ \ x \geq 3{,}14$

PARAGRAAF 11.5 : OPTIMALISERINGSPROBLEMEN

LES 1 : OPTIMALISEREN

VOORBEELD 1



Gegeven is een doosje waarvan de lengte 3 keer zo groot is als de breedte. De inhoud van dit doosje is 3000 m^3. De kosten voor de zijkanten zijn € 0,20 per dm^2. De boven- en onderkant zijn € 0,50 per dm^2.

a. Toon aan dat de hoogte te schrijven is als $h = \frac{1000}{x^2}$

b. Bepaal de formule van de kosten van het doosje uitgedrukt in x.

c. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen de kosten van het doosje minimaal zijn.

OPLOSSING 1

a. Breedte = x, lengte = 3x en breedte = h

Inhoud = $3x \cdot x \cdot h \; = \; 3000$ dus $h = \frac{3000}{3x^2} = \frac{1000}{x^2}$

b. Oppervlakte bestaat uit

Opp voor en achter	= (2x·h) ·2 = 4xh	→ Kosten x € 0,20 → 0,80xh
Opp links en rechts	= (x·h) ·2 = 2xh	→ Kosten x € 0,20 → 0,40xh
Opp voor en achter	= (2x·x) ·2 = $4x^2$	→ Kosten x € 0,50 → $2x^2$
Kosten totaal	$= \; 1{,}2xh \; + \; 2x^2$.	

Kosten totaal in x $= 1{,}2x \cdot \frac{1000}{x^2} + 2x^2 = \frac{1200x}{x^2} + 2x^2 = \frac{1200}{x} + 2x^2$

c.

$K \; = \; 1200x^{-1} \; + \; 2x^2$

$K` \; = \; -1200x^{-2} \; + \; 4x \; = \frac{-1200}{x^2} + 4x$

Kosten minimaal dus $K` \; = \; 0$

$\frac{-1200}{x^2} + \; 4x \; = \; 0$

$\frac{-1200}{x^2} = - \; 4x$

$-4x^2 \; = \; -1200$

$x^2 \; = \; 300$

$x \; = \; \sqrt{300} \; = \; 17{,}32$

Afmetingen :

- breedte = 17,32 cm
- lengte = 51,96 cm
- hoogte = $\frac{1000}{17{,}32^2}$ = 3,33 cm